Camera obscura – Wo muss ich eigentlich stehen, um das Bild zu machen?

Adrian Schüpbach

photo@gribex.net

1 Einleitung

Fotografieren macht richtig Spass und die Vorfreude auf schöne Bilder kann richtig gross sein! Natürlich hoffen wir auf schöne und gelungene Bilder, die ein schönes Motiv zeigen. Ein schönes Motiv zu finden und dieses von seiner besten Seite zu fotografieren, ist eine wichtige Voraussetzung für ein schönes Bild. Das Suchen und Ablichten des Motivs ist inspirierend und weckt in uns die künstlerische Ader.

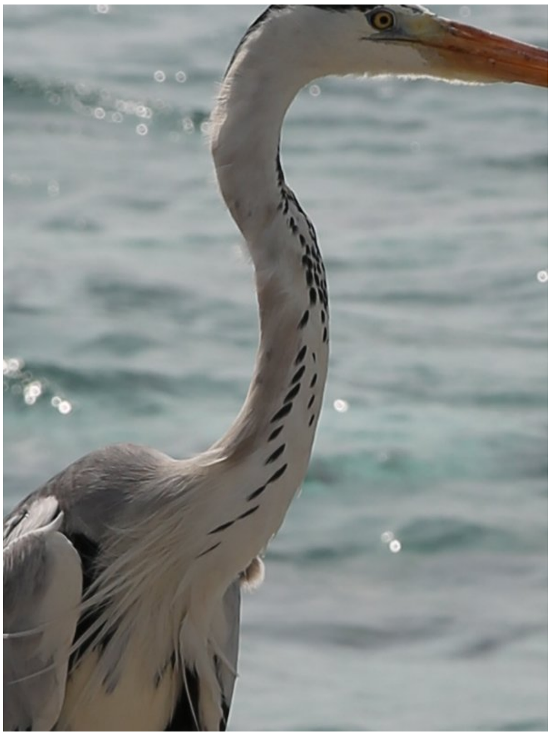
Natürlich möchten wir auch, dass das Bild technisch gesehen in einem guten Zustand ist. Das Bild soll scharf und richtig belichtet sein und das Motiv soll komplett und gut sichtbar darauf zu sehen sein.

Die "Camera obscura" aus einer Kartonschachtel oder einer Schokoladendose ist eine sehr einfache Kamera. Es gibt keine Belichtungsmessung und es gibt auch keinen Sucher, durch den wir durchschauen können. Wir wissen also nicht so genau, wie lange wir das Fotopapier belichten sollen und wir sehen auch nicht, wie weit weg wir vom Motiv stehen sollen, um es zu fotografieren.

Trotzdem gibt es nichts Ärgerliches, als wenn das Motiv viel zu klein auf dem Bild ist oder wenn Kopf, Hände oder Füsse abgeschnitten sind.

Abbildung 1 zeigt dreimal das gleiche Bild, fotografiert aus verschiedenen Abständen.

(a) Zu weit weg: Das Wichtigste sieht man kaum.



(b) Zu nahe: Füsse und Kopf abgeschnitten.

(c) Super: Komplett darauf und genug gross!

Abbildung 1: Beim Fotografieren ist es wichtig, den richtigen Abstand zu wählen.

In Abbildung 1(a) ist das Motiv viel zu klein, weil es aus zu grosser Entfernung aufgenommen wurde. Ausserdem ist ein Schild sichtbar, das eigentlich nur stört. Im Gegenteil dazu, ist das Bild in Abbildung 1(b) aus einem zu kleinen Abstand aufgenommen. Deshalb sind leider der Kopf und die Füsse abgeschnitten. Schliesslich zeigt Abbildung 1(c) die gleiche Aufnahme im richtigen Abstand. Dieses Bild bereitet am meisten Freude, weil das Motiv komplett darauf zu sehen ist und es trotzdem nicht zu klein ist[1].

Aus diesem Beispiel lernen wir, dass es wichtig ist, sich Gedanken über den richtigen Abstand zum Motiv schon beim Fotografieren zu machen. Die Frage ist nun, wie wir den geeigneten Abstand ermitteln können.

Genau diese Frage soll hier beantwortet werden. Dieses kleine Dokument zeigt, wie wir mit einfacher Geometrie und Mathematik den geeigneten Abstand ausrechnen können. Ausserdem zeigt das Dokument, dass Mathematik und Geometrie nicht nur für die Schule sind, sondern im richtigen Leben für etwas Schönes verwendet werden können ;-).

Ich habe versucht, die Rechnungen so einfach und verständlich wie möglich aufzuschreiben. Um die schematische Darstellung der Kamera in Abschnitt 3.1 zu verstehen, müssen wir wissen, was ähnliche Dreiecke sind. Deshalb beginne ich in Abschnitt 2 damit, ähnliche Dreiecke zu erklären. Der Rest des Dokumentes baut auf dieser Ähnlichkeit auf.

2 Ähnliche Dreiecke

Umgangssprachlich könnte man sagen, dass zwei Dreiecke ähnlich sind, wenn sie gleich aussehen, aber das eine Dreieck grösser als das andere ist.

In der Geometrie dürfen wir uns aber nicht (nur) auf unser Gefühl verlassen, sondern wir brauchen Regeln, um herauszufinden, ob zwei Dreiecke ähnlich sind. Es gibt vier Regeln, um herauszufinden, ob zwei Dreiecke zueinander ähnlich sind. Wenn mindestens eine dieser Regeln zutrifft, sind die Dreiecke ähnlich. Die Regeln heissen "Ähnlichkeitssätze". Für die Berechnung des geeigneten Abstandes brauchen wir nur eine solche Regel, nämlich den *Winkel-Winkel-Satz*.

Winkel-Winkel-Satz: Wenn zwei Dreiecke zwei gleiche Winkel haben, sind sie zueinander ähnlich.

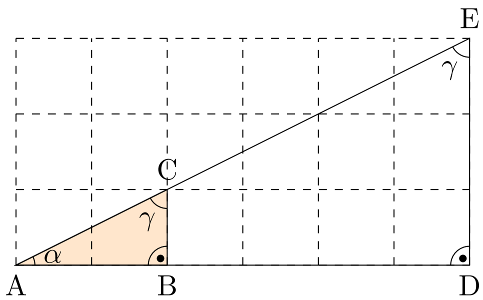


Abbildung 2: Zwei ähnliche Dreiecke: ADE ist dreimal so gross wie ABC.

Abbildung 2 zeigt ein Beispiel zweier ähnlicher Dreiecke ABC und ADE. Beide Dreiecke sind rechtwinklig und die Winkel α und γ sind in beiden Dreiecken genau gleich:

- Winkel $CAB = EAD = \alpha$
- Winkel $ACB = AED = \gamma$
- Winkel $ABC = ADE = 90°$

Beim grossen Dreieck ist *jede* Strecke dreimal so lange wie beim kleinen Dreieck (du kannst die Anzahl Häuschen zählen, um das zu überprüfen):

[1] Natürlich kann ein Bild absichtlich aus einem viel zu kurzen oder langen Abstand aufgenommen werden, wenn man damit eine bestimmte Bildaussage erreichen will.

- $\overline{AD} = 3 \cdot \overline{AB}$
- $\overline{AE} = 3 \cdot \overline{AC}$
- $\overline{DE} = 3 \cdot \overline{BC}$

3 Kamera, Bild und Objekt

3.1 Schematische Darstellung

Abbildung 3 zeigt die wichtigsten Punkte der Kamera und des Objektes. Der leicht schraffierte Teil stellt die Kamera dar. Der Punkt L markiert die Stelle des Kameraloches, durch das die Lichtstrahlen gehen.

Auf der linken Bildseite bezeichnet die Strecke $\overline{OU}$ die Grösse des Fotopapiers. Der Punkt M ist der Mittelpunkt des Papiers. Die Strecke $h = \overline{MU}$ ist somit halb so gross wie das ganze Papier.

Auf der rechten Seite des Bildes steht die Strecke $\overline{RS}$ für die Grösse des Objektes, also z.Bsp. für die Grösse eines Menschen, eines Baumes oder eines Gebäudes. Der Punkt Q ist der Mittelpunkt des Objektes. Die Strecke $k = \overline{QR}$ ist somit halb so gross wie das ganze Objekt.

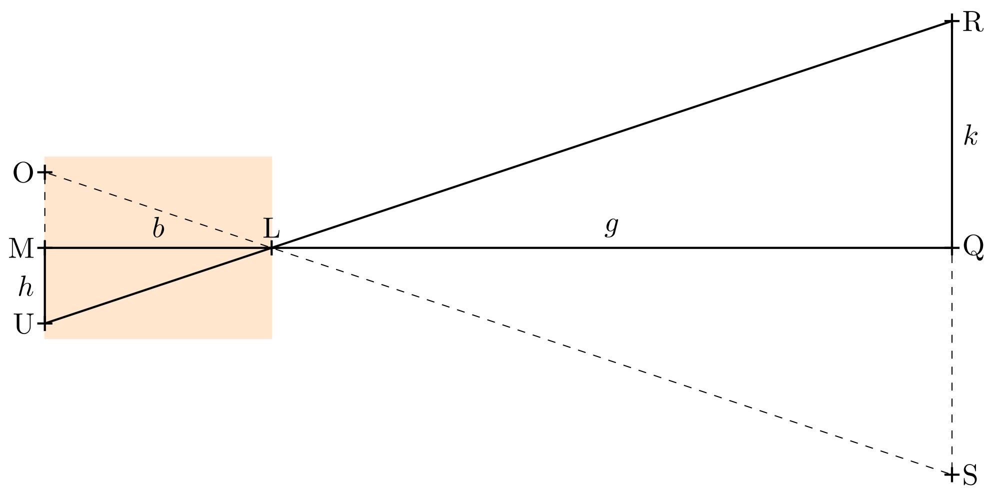


Abbildung 3: Schematische Darstellung der Kamera und des Objektes

Die Strecke $b = \overline{LM}$ bezeichnet die Kameralänge. Diese Länge ist festgelegt durch die Schachtel- oder die Schokoladendosengrösse (Abstand Boden-Deckel).

Schliesslich steht die Strecke $g = \overline{LQ}$ für den Abstand zwischen der Kamera und dem Objekt, das wir fotografieren möchten.

3.2 Bekannte und gesuchte Grössen

In unserer schematischen Darstellung (Abbildung 3) gibt es vier Strecken: h, b, k und g. Drei dieser vier Strecken kennen wir bereits:

- h ist die Hälfte der Papiergrösse
- b ist die Länge der Kartonschachtel oder Schokoladendose
- k ist die Hälfte der Objektgrösse

Die einzige unbekannte Grösse ist die Länge der Strecke g. Diese soll so berechnet werden, dass das Objekt auf das Papier passt und genügend gross abgelichtet wird. Wenn wir das Bild ein bisschen abändern, so dass nur noch zwei Dreiecke übrig bleiben, können wir g einfach berechnen. Der nächste Abschnitt erklärt, wie das geht.

3.3 Abstand mittels ähnlicher Dreiecke berechnen

Der Abstand g kann durch die *Verhältnisse der Grössen* der Dreiecke LMU und LQR berechnet werden. Abbildung 4 ist eine Vereinfachung von Abbildung 3. Sie zeigt die zwei ähnlichen Dreiecke, die wir für die Berechnung des Abstandes g verwenden.

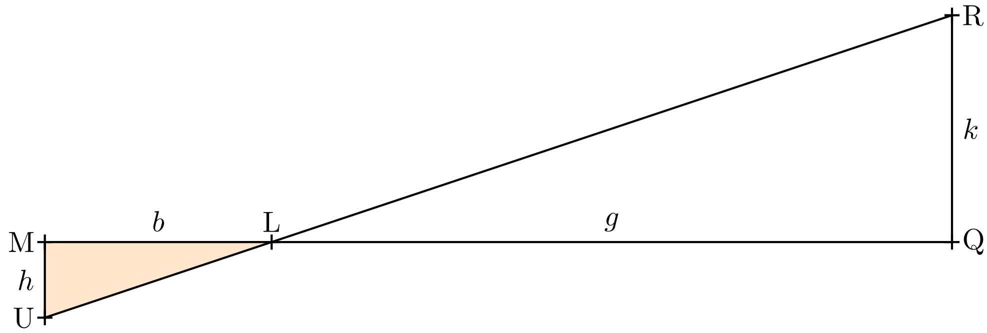


Abbildung 4: Mit diesen zwei Dreiecken kann der Abstand g berechnet werden.

Das schraffierte Dreieck kann mit dem Zirkel um den Punkt L gedreht werden. Das ist in Abbildung 5 dargestellt. Schliesslich sind die beiden Dreiecke übereinander, wie in Abbildung 6 dargestellt. Nun sieht man auch, dass die beiden Dreiecke ähnlich sind. Der einzige Unterschied ist, dass das grosse Dreieck grösser als das kleine ist.

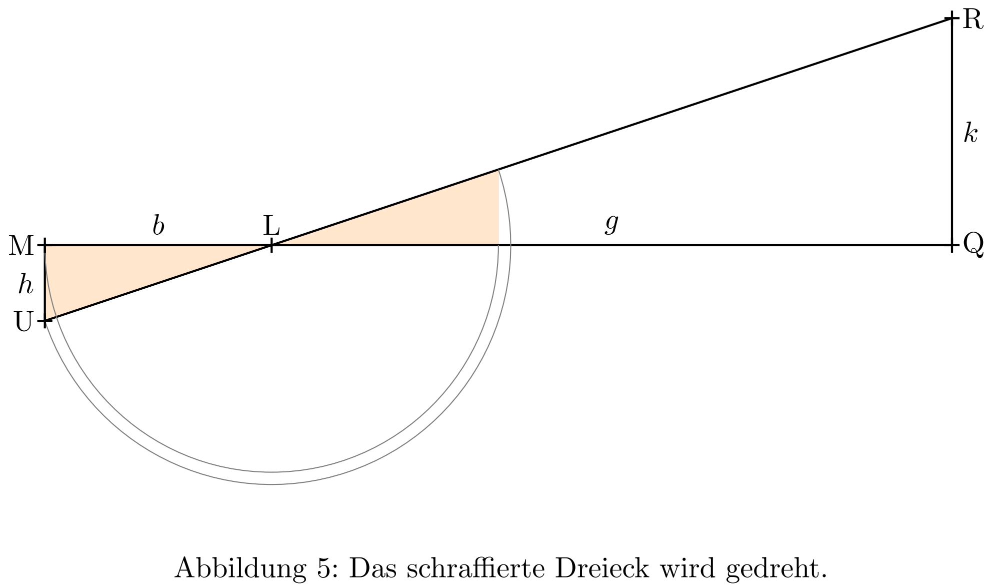


Abbildung 5: Das schraffierte Dreieck wird gedreht.

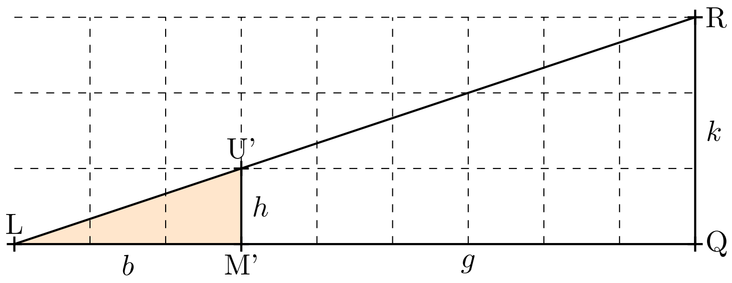


Abbildung 6: Das schraffierte Dreieck überlappt mit dem grossen Dreieck.

In Abbildung 6 kannst du die Häuschen zählen und überprüfen, dass alle Seiten des grossen Dreiecks im gleichen Verhältnis grösser sind, als die Seiten des kleinen Dreiecks (in diesem Fall hier sind sie dreimal so lang, das muss aber nicht immer so sein). Die Dreiecke sind also ähnlich zueinander. Im Bild sieht man auch, dass k dreimal so lang ist wie h und g dreimal so lang wie b.

Der nächste Abschnitt zeigt, wie man das Verhältnis allgemein ausrechnen kann. In Wirklichkeit ist es ja nicht immer genau dreimal so lang.

3.4 Berechnung

Die Strecke k ist länger als die Strecke h. Beide Längen sind bekannt. Die Strecke g ist länger als die Strecke b und zwar im gleichen Verhältnis, wie k grösser als h ist. Daraus kann man folgende Rechnung ableiten:

$$g : b = k : h \tag{1}$$

Das "Geteilt durch"-Zeichen kann man als Bruchstrich schreiben:

$$\frac{g}{b} = \frac{k}{h} \tag{2}$$

Um die Gleichung aufzulösen, multipliziert man beide Seiten mit b:

$$\frac{b \cdot g}{b} = \frac{b \cdot k}{h} \tag{3}$$

Schliesslich kann man auf der linken Seite das b wegkürzen und man erhält das Resultat für g:

$$g = \frac{b \cdot k}{h} \tag{4}$$

Du kannst Formeln (1) und (2) überprüfen, indem du in Abbildung 6 die Häusschen zählst, die Werte für g, b, k und h einsetzt und anschliessend die Division ausrechnest. Das Resultat ist auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens gleich.

Für die Berechnung benutzen wir nur die halbe Papiergrösse h, aber auch nur die halbe Objektgrösse k.

3.5 Beispiele

Dieser Abschnitt berechnet den Abstand g für einige Objekt- und Papiergrössen und fasst die Ergebnisse in Tabelle 1 zusammen.

Kameralänge b	Papiergrösse h	Objektgrösse k	Abstand $g = \frac{b \cdot k}{h}$
5cm	5cm	20cm	$\frac{5cm \cdot 10cm}{2.5cm} = 20cm$
5cm	5cm	50cm	$\frac{5cm \cdot 25cm}{2.5cm} = 50cm$
5cm	5cm	100cm	$\frac{5cm \cdot 50cm}{2.5cm} = 100cm$
5cm	5cm	150cm	$\frac{5cm \cdot 75cm}{2.5cm} = 150cm$
5cm	10cm	20cm	$\frac{5cm \cdot 10cm}{5cm} = 10cm$
5cm	10cm	50cm	$\frac{5cm \cdot 25cm}{5cm} = 25cm$
5cm	10cm	100cm	$\frac{5cm \cdot 50cm}{5cm} = 50cm$
5cm	10cm	150cm	$\frac{5cm \cdot 75cm}{5cm} = 75cm$
15cm	5cm	20cm	$\frac{15cm \cdot 10cm}{2.5cm} = 60cm$
15cm	5cm	50cm	$\frac{15cm \cdot 25cm}{2.5cm} = 150cm$
15cm	5cm	100cm	$\frac{15cm \cdot 50cm}{2.5cm} = 300cm$
15cm	5cm	150cm	$\frac{15cm \cdot 75cm}{2.5cm} = 450cm$
15cm	10cm	20cm	$\frac{15cm \cdot 10cm}{5cm} = 30cm$
15cm	10cm	50cm	$\frac{15cm \cdot 25cm}{5cm} = 75cm$
15cm	10cm	100cm	$\frac{15cm \cdot 50cm}{5cm} = 150cm$
15cm	10cm	150cm	$\frac{15cm \cdot 75cm}{5cm} = 225cm$

Tabelle 1: Berechnungsbeispiele

4 Fazit

Dieses kleine Dokument hat gezeigt, dass bereits einfache Überlegungen helfen können, den richtigen Bildausschnitt schon beim Fotografieren zu wählen. Relativ einfache Geometrie und Mathematik genügen, um erfolgreich den optimalen Abstand zu berechnen.

Die Berechnung in diesem Dokument bezieht sich auf die “Camera obscura”. Ähnliche Überlegungen sind aber auch beim Fotografieren mit modernen Kameras hilfreich.